

DÁP ÁN - THANG ĐIỂM  
ĐỀ THI OLYMPIC CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN 2015

Môn thi: TOÁN

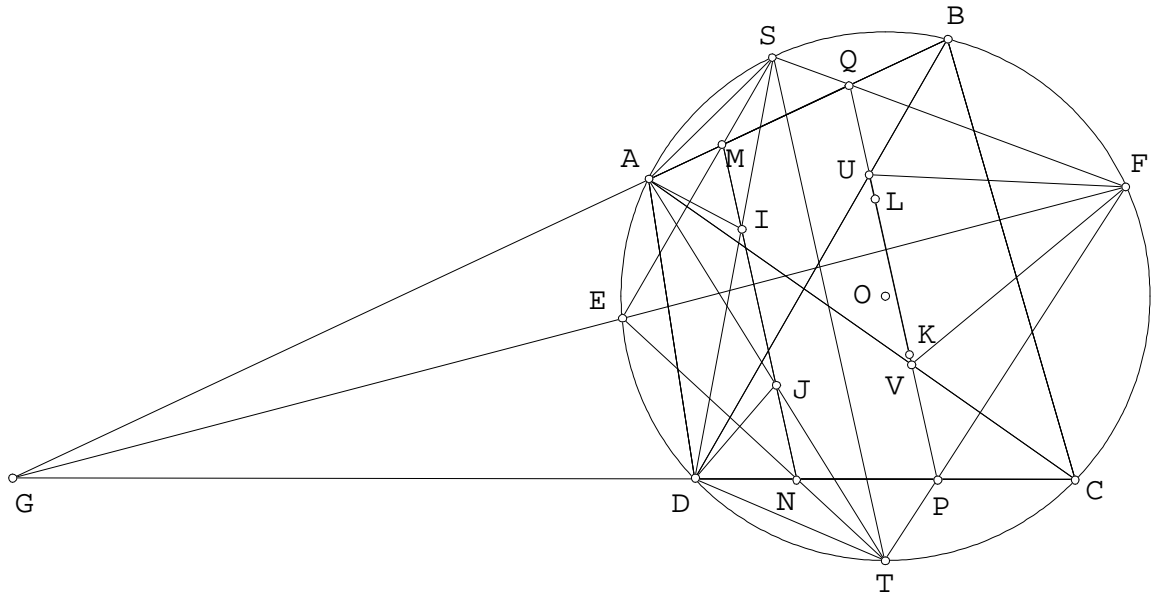
Ngày thứ hai

**Câu IV. (7đ)** Giả sử  $p$  là một ước nguyên tố bất kì của  $n!$ , số mũ của  $p$  trong  $n!$  bằng

$$\alpha_p = \left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \dots < \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots < n$$

Suy ra  $\alpha_p \leq n - 1$ . Nếu  $b : p$  thì  $A : p^{n-1}$ . Suy ra  $A : p^{\alpha_p}$ . Nếu  $(b, p) = 1$ . Khi đó trong  $p^i$  số liên tiếp bất kì của dãy  $a, a + b, a + 2b, \dots, a + (n - 1)b$  có đúng một số chia hết cho  $p^i$  với mọi  $i$  thỏa mãn  $p^i \leq n$ . Như vậy trong dãy trên có  $\left[ \frac{n}{p} \right]$  số chia hết cho  $p$ ,  $\left[ \frac{n}{p^2} \right]$  số chia hết cho  $p^2, \dots, \left[ \frac{n}{p^i} \right]$  số chia hết cho  $p^i, \dots$ . Suy ra số mũ của  $p$  trong  $A$  lớn hơn hoặc bằng  $\alpha_p$ . Suy ra  $A : p^{\alpha_p}$ .

**Câu V. a)** Dễ thấy tam giác  $SAI$  và  $DTA$  cân và có  $\angle ASI = \angle DTI$  nên hai tam giác đó đồng dạng. Lại dễ chứng minh tứ giác  $AIJD$  nội tiếp nên  $\angle MAI = \angle IAD = \angle DJN$  và  $\angle NDJ = \angle JDA = \angle AIM$ . Từ đó hai tam giác  $MAI$  và  $NJD$  đồng dạng. Từ đó suy ra  $SMA$  và  $TNJ$  đồng dạng. Vậy  $\angle ASM = \angle NTJ$  do đó  $SM$  và  $TN$  cắt nhau tại  $E$  trên đường tròn  $(O)$ .



b) Gọi  $AB$  cắt  $CD$  tại  $G$ .  $GE$  cắt  $(O)$  tại  $F$  khác  $E$ . Ta thấy  $GC.GD = GE.GF = GM.GQ$ . Từ đó tứ giác  $MQFE$  nội tiếp nên  $\angle QFE = \angle AME =$

$\angle MAS + \angle MSA = \angle MBS + \angle AFE = \angle SFA + \angle ASE = \angle EFS$ . Từ đó  $S, Q, F$  thẳng hàng. Tương tự  $T, P, F$  thẳng hàng. Từ chứng minh trên  $SMA$  và  $TNJ$  đồng dạng nên tam giác  $GMN$  cân suy ra  $GM = GN$ . Lại có  $GM.GQ = GN.GP$  nên  $GP = GQ$  suy ra  $PQ \parallel MN \parallel ST$ . Từ đó đường tròn nội tiếp tam giác  $FPQ$  tiếp xúc ( $O$ ). Vậy theo định lý Poncelet nếu  $PQ$  cắt  $DB, AC$  tại  $U, V$  thì đường tròn ngoại tiếp tam giác  $FUV$  cũng tiếp xúc ( $O$ ) và tiếp xúc  $DB, AC$ . Từ đó theo định lý Thebault thì  $PQ$  đi qua tâm nội tiếp hai tam giác  $ABC$  và  $DBC$ .

**Câu VI. (7đ)** Đặt  $a = 3yz, b = 3zx, c = 3xy$ . Ta chứng minh cần  $\sum \frac{bc}{\sqrt{a+3}} \leq \frac{3}{4}$ . Nhân hai vế với 6, bất đẳng thức tương đương  $\sum a^2 - 2 \sum ab + 4 \sum bc \left(1 - \frac{3}{\sqrt{a+3}}\right) \geq 0$  hay  $\sum a^2 - 2 \sum ab + 4abc \sum \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a+3})} \geq 0$  hay  $\sum a^2 - 2 \sum ab + 3abc + 4abc \left(\sum \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a+3})} - \frac{3}{4}\right) \geq 0$ . Ta sẽ chứng minh  $\sum a^2 - 2 \sum ab + 3abc \geq 0$  và  $\sum \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a+3})} \geq \frac{3}{4}$ . Thật vậy, bất đẳng thức thứ nhất tương đương  $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)+9abc \geq 0$  hay  $a^3+b^3+c^3-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)+3abc \geq 0$ , giả sử  $a \leq b \leq c$  suy ra  $a \leq 1$ , bất đẳng thức trở thành  $a(b-a)(c-a)+(b-c)^2(b+c-a) \geq 0$  đúng. bất đẳng thức thứ hai, xét  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x+3})}$  với  $x > 0$ . Ta có  $g'' = \frac{1}{4}(8x+27\sqrt{x}+27)(\sqrt{x}+3)^{-3}x^{-5/2} > 0$  nên  $g(a)+g(b)+g(c) \geq 3g\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{3}{4}$ .